

Ancora la formula di Simpson

- Consideriamo il metodo dei trapezoidi: sappiamo che l'errore di troncamento è dato da un serie potenze pari di $h=(b-a)/N$:

$$S_N = S_\infty + c_2 h^2 + c_4 h^4 + c_6 h^6 + \dots$$

- Nel momento in cui raddoppiamo il passo nella procedure iterativa, l'integrale successivo avrà un errore di troncamento dato da:

$$S_{2N} = S_\infty + c_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + c_4 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + c_6 \left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots$$

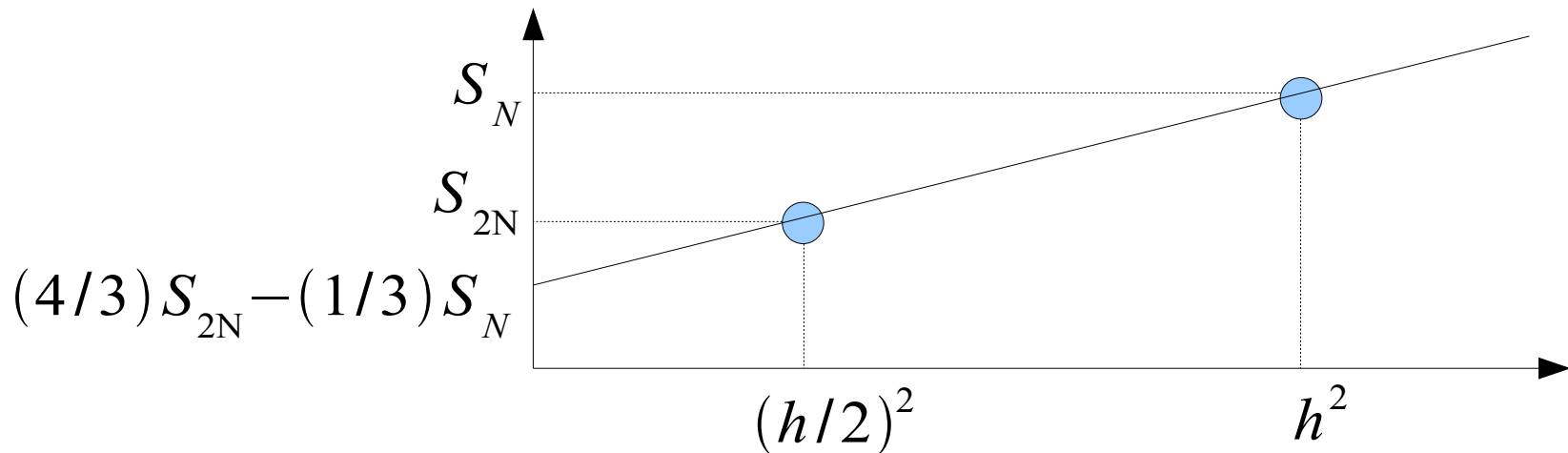
- Diventa immediato verificare che si può effettuare una combinazione lineare di questi due integrali per eliminare il contributo $c_2 h^2$, migliorando l'ordine di convergenza del metodo:

$$\frac{4S_{2N} - S_N}{3} = S_\infty - \frac{1}{4} c_4 h^4 + \frac{5}{16} c_6 h^6 + \dots$$

...e si può verificare facilmente che questa è esattamente la formula di Simpson!

Integrazione alla Romberg

Della formula precedente si può dare un'interpretazione geometrica:



In generale, se calcolo un certo numero di integrali con N diversi, ho delle coppie di punti:

$$(h^2, S_N) \quad ((h/2)^2, S_{2N}) \quad ((h/4)^2, S_{4N}) \quad \dots$$

e posso costruire un polinomio tra questi punti (ad esempio usando il metodo di Lagrange) ed ottenere una stima dell'integrale con un errore di troncamento migliore.

Integrali impropri

- **Integrali con estremi infiniti**

$$\int_a^{\infty} dx f(x)$$

- si possono effettuare dei cambiamenti di variabili per riportare entrambi gli estremi ad essere finiti.
- Esempi classici sono:

$$t = \frac{1}{x}, dx = -\frac{1}{t^2} dt \quad \int_a^{\infty} dx f(x) \Rightarrow \int_0^{1/a} dt \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$t = e^{-x}, dx = -\frac{1}{t} dt \quad \int_a^{\infty} dx f(x) \Rightarrow \int_0^{e^{-a}} dt \frac{1}{t} f(-\ln t)$$

Esempi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} &= 2 \int_0^{+\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} \\ &= 2 \left[\int_0^1 dx \frac{\sin^2 x}{x^2} + \int_1^{+\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} \right] \\ &= 2 \left[\int_0^1 dx \frac{\sin^2 x}{x^2} + \int_0^1 dt \sin^2 \frac{1}{t} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} dx \frac{x^\alpha}{e^x \pm 1} \quad \alpha \geq 1 \\ &= \int_0^{+\infty} dx e^{-x} \frac{x^\alpha}{1 \pm e^{-x}} \\ &= \int_0^1 dt \frac{(-\ln t)^\alpha}{1 \pm t}\end{aligned}$$

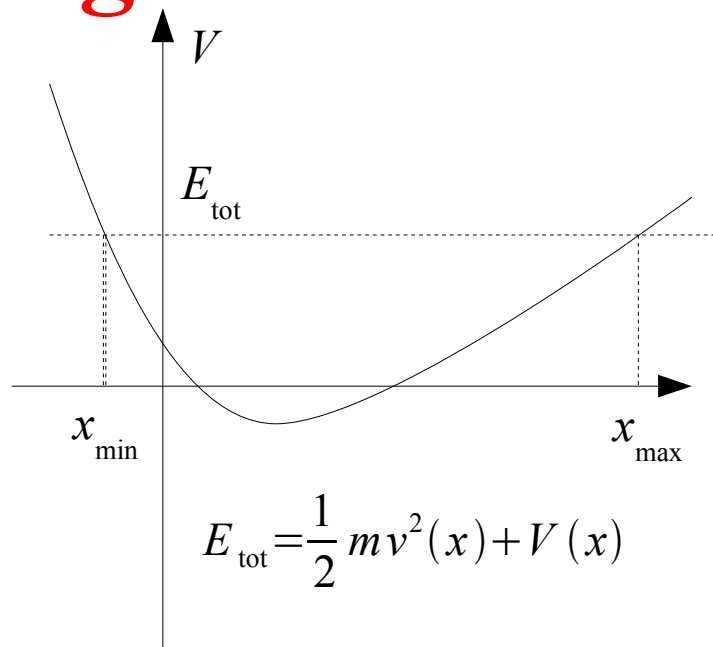
- Si noti che in entrambi i casi l'integranda presenta una singolarità nel punto 0, in cui abbiamo mappato l'estremo infinito:
 - ci conviene usare il metodo del *midpoint*
 - Non possiamo aspettarci a priori una convergenza veloce come h^2

Singularità integrabili

- Oltre ai casi precedenti di trasformazioni di variabili, ci sono altre situazioni in cui si ha bisogno di integrare una funzione che ha una singolarità integrabile in uno degli estremi.
- Un esempio è il calcolo del periodo di oscillazione di una particella in un potenziale:

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{v(x)}$$

$$= 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_{\text{tot}} - V(x))}}$$



- Che in prossimità degli estremi ha una singolarità del tipo $1/\sqrt{(x - x_{\min})}$ dato che $E_{\text{tot}} = V(x_{\min}) = V(x_{\max})$ e $V(x) = V(x_{\min}) + V'(x_{\min})(x - x_{\min}) + \dots$

Singularità integrabili (2)

- Un esempio di questo problema è l'esercizio in laboratorio:

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}} = 2 \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}}$$

anche in questo caso:

- usare il *midpoint*
- non aspettarsi una buona convergenza
- Una soluzione all'ultimo problema è quello di utilizzare la seguente trasformazione di variabile:

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \propto (x-a)^{-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1: \quad t = (x-a)^{1-\alpha} \quad x = a + t^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad dx = \frac{1}{1-\alpha} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dt$$

- L'integrale diventa:
$$T = \int_0^{\sqrt{\theta_{\max}}} \frac{2t dt}{\sqrt{\cos(t^2 - \theta_{\max}) - \cos\theta_{\max}}}$$

e presenta buone caratteristiche di convergenza.