Rette e correlazioni

Attilio Andreazza
Università degli Studi di Milano

December 12, 2000

Nella simulazione dell'esperienza dello spettrometro a prisma, il risultato era che la stima dei parametri di Cauchy A e B risultava molto migliore di quella ottenuta propagando gli errori secondo le formule del fit ad una retta.

La motivazione di questa discrepanza è che la formula del fit assumeva che gli errori dei singoli punti siano scorrelati, mentre è stato dimostrato che gli errori su θ_0 e α inducono una forte correlazione tra i valori misurati di $n(\lambda)$.

Per capire come agisce la correlazione, consideriamo alcuni casi limite.

In figura 1 è mostrato il caso di una retta passante per due punti, misurati simmetricamente rispetto all'origine. Se indichiamo la retta come

$$y = A + Bx,$$

abbiamo che ovviamente

$$A = \frac{y_2 + y_1}{2},$$

$$B = \frac{y_2 - y_1}{2a}.$$

Assumiamo che i punti abbiano un errore σ_y sulla misura delle ordinate. Se gli errori sono indipendenti, la normale propagazione degli errori ci dice le incertezze su A e B sono

$$\sigma_B = \frac{1}{\sqrt{2}a}\sigma_y,$$

$$\sigma_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_y.$$

Supponiamo invece che gli errori siano completamente correlati, ovvero che se y_1 differisce dal valore vero di una certa quantità, allora y_2 pure differisce dal valore vero della stessa quantità. Nel caso della simulazione, questo era l'effetto che si aveva nei casi in cui l'unica incertezza era su α o su θ_0. In tal caso è ovvio che B viene calcolato senza incertezze, perché i due punti si muovono insieme

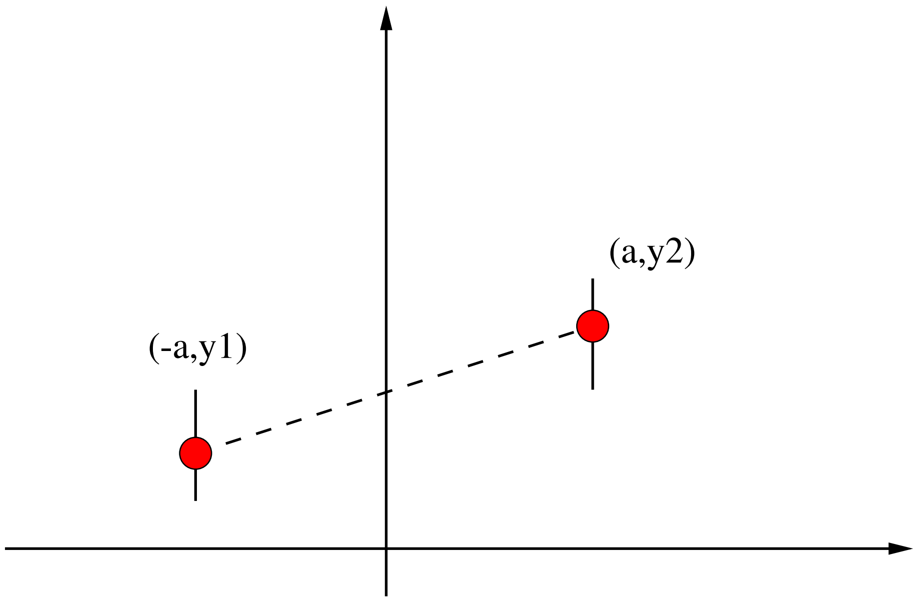

Figure 1: Retta passante per due punti simmetrici rispetto all'origine.

e non cambia il valore del coefficiente angolare. Per quanto riguarda A invece, essendo i due punti correlati farne la media non riduce l'errore e quindi si ha

$$\sigma_B = 0,$$

$$\sigma_A = \sigma_y.$$

Quindi in questo esempio vediamo che l'effetto della correlazione è di ridurre l'incertezza su B, aumentando però quella su A.

Consideriamo ora il caso in figura 2, in cui i punti si scostano dall'origine delle ascisse. In tal caso la relazione per B è sempre la stessa:

$$B = \frac{y_2 - y_1}{2a},$$

mentre per A si ha

$$A = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{2a} x_1.$$

Quindi, nel caso di punti non correlati, l'errore su B rimane lo stesso, ma quello su A aumenta a causa dell'estrapolazione da x_1 verso lo 0:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{x_1^2 + (x_1 + 2a)^2}{(2a)^2}} \sigma_y.$$

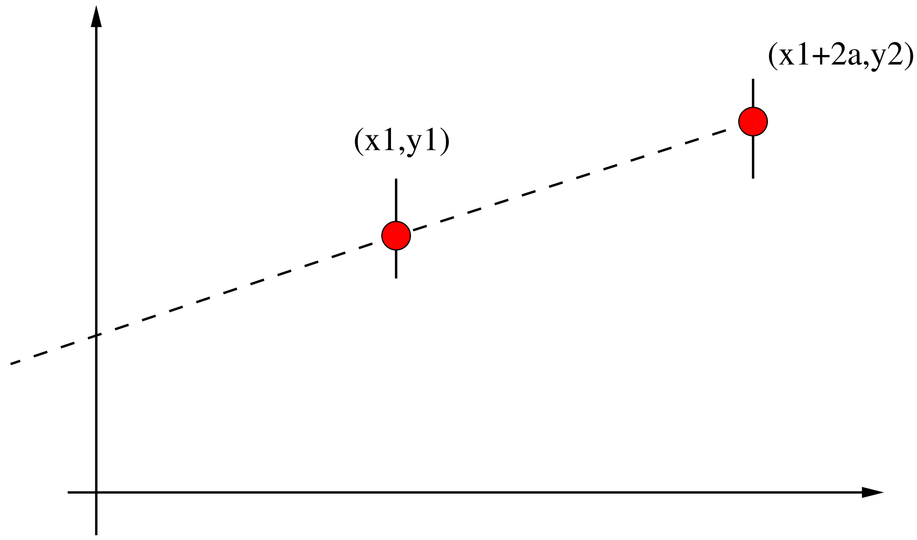

Figure 2: Retta attraverso due punti generici.

Se i punti sono completamente correlati, come nel caso precedente, allora B è senza errore. Di conseguenza il contributo dell'errore di estrapolazione è nullo e si ha di nuovo $\sigma_B = 0$ e $\sigma_A = \sigma_y$.

In tal caso, a seconda che del valore dell'errore di estrapolazione, punti correlati possono anche dare una stima di A migliore di quella che si avrebbe in assenza di correlazione.

Nell'esperienza i valori della x andavano tra 3×10^{-6} e 6×10^{-6} nm^{-2}, e quindi si discostavano tutti dallo zero. Esisteva inoltre una significativa (ma non completa) correlazione tra i punti. Di conseguenza i valori di A e B ricavati come risultato della procedura di fit avevano un'incertezza (ricavata dalla distribuzione degli scarti) inferiore di quanto calcolato con la propagazione degli errori nel caso di errori scorrelati.

In teoria è possibile tenere conto delle correlazioni nel momento del fit e quindi dare analiticamente una stima corretta degli errori. La matematica però è molto più complicata ed in quasi tutti i casi concreti è più semplice dare la stima degli errori veri attraverso una simulazione della procedura di raccolta ed analisi dei dati.